No.26

DEAを用いた費用効率性分析における長期と短期の区別

高嶋　裕一

2006年8月28日

DEAを用いた費用効率性分析における長期と短期の区別

高嶋裕一*

平成18年2月23日

概要

費用効率性分析はDEAを用いたノンパラメトリックな費用関数推計方法と言える。しかし、DEA分析はクロスセクションにおける分析が主眼であり、長期費用分析について論理的に整合性のある理論構築がなされてきたとは言えない。

本論考では、長期時系列データに適用可能なDEA手法を開発することを目的とする。

目次

1 問題意識

費用効率性分析はDEAを用いたノンパラメトリックな費用関数推計方法と言える。しかし、DEA分析はクロスセクションにおける分析を基本としており、そのため時間の取り扱いについて論理的に整合性のある理論構築がなされてきたとは言えない。これは、比較的長期の期間での分析を重視する産業分析(自然独占性の計測等)において、分析手法として適切ではないという批判を受けざるを得ない。

時系列データをDEAによって分析する枠組が示されたのは、Charnes等(1985)による(WINDOW分析)。WINDOW分析はその後DEA分析において頻繁に用いられることになるが、幾つかの難点が指摘されている。例えば、(1)同一組織の複数期間のデータを異なるDMUとして捉えることの理論的な解釈が難しい、(2)適切なWINDOW幅の設定方法がない、などである。WINDOW分析は平滑化のための移動平均法と類似しており、それ自体はなんら時系列分析ではない、とも考えられる。

しかし、近年のDEA手法の発展の結果、時系列データをDEAで取り扱う方法について様々な

*岩手県立大学総合政策学部

提案が蓄積されてきている。本論考では、これまでの DEA を用いた先行研究における時間の取り扱い方法について整理を行い、長期時系列データに適用可能な DEA 手法を提示し、これに基いた実証分析例を示すことを目的とする。

2 DEAにおける時間的要素：既往研究の整理

DEA における時間の取り扱いには混乱がみられ、未だに体系的な整理がなされていないようである。ここでは、幾つかの文献を整理し、幾つかの論点を抽出してみたい。

2.1 Alam and Sickles の研究

Alam and Sickles(1997) の主要な関心は、競争環境の変化が技術的効率性の改善に寄与するかどうか、という点にある。そのため、技術的効率性の測定手段である DEA のスコアが長期的にどのように変動するか、を調べねばならず、この試みは必然的に DEA における時間の取り扱いの再検討につながる。

彼らはパラメトリック分析における時間の取り扱いにヒントを得ている。彼らの方法は凸包を構成するために、以下のように、時系列のすべてのデータを使うということである。つまりクロスセクション方向の線型和だけでなく、時間方向の線型和も同時に用いられる。この方法は長期的なフロンティアを抽出するものとして合理的である。

$$\begin{aligned} &\max \theta_t \\ &s.t. \quad \sum_{t=0}^{t}\sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i X_t^i \le X_t^o \\ &\qquad \sum_{t=0}^{t}\sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i Y_t^i \ge \theta_t Y_t^o \\ &\qquad \lambda_t^i \ge 0 \end{aligned} \tag{1}$$

一つの疑問として、擬固定的投入要素について考慮されていないこと、そのため、長期と短期の関係が明らかとなっていないことが挙げられる。彼らの問題意識は競争環境変化にあるはずなので、イノベーションとダイナミクスの関係についても重視する必要があるように思われる。

2.2 Färe and Grosskopf の研究

Färe and Grosskopf(1996) は、投入要素と産出物の異時点間代替と、ネットワーク生産技術に基づく中間投入要素概念を基礎として、幾つかの動学的なモデルを提示している。その中から主要な二つのモデルを紹介する。

異時点間予算配分モデル (The Intertemporal Budget Model)

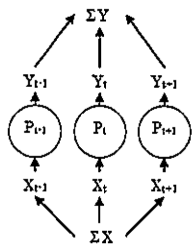

図 1: 異時点間予算配分モデル

$$\begin{aligned} &\max \overline{Y} = \sum_{t=0}^{T} \hat{Y}_t \\ &s.t. \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i X_t^i \le \hat{X}_t \quad (t=0,\cdots,T) \\ &\qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i Y_t^i \ge \hat{Y}_t \quad (t=0,\cdots,T) \\ &\qquad \sum_{t=0}^{T} \hat{X}_t \le \overline{X}^o \\ &\qquad \lambda_t^i \ge 0 \end{aligned} \tag{2}$$

このモデルは $\overline{X}^o$ という総投入量を異時点間で配分し、これによって実現される総産出量 $\overline{Y}$ を最大にするものである。この考えかたを模式的に表現すると図1のようになる。

投入要素価格 w_t、生産物価格 p_t が得られている場合には、$\overline{Y} = \sum_{t=0}^{T} \hat{Y}_t$ の代りに $\overline{R} = \sum_{t=0}^{T} p_t \hat{Y}_t$、$\sum_{t=0}^{T} \hat{X}_t \leq \overline{X}^o$ の代りに $\sum_{t=0}^{T} w_t \hat{X}_t \leq \overline{C}^o$、というような定式化も考えられる。

基本的動学モデル (The Basic Dynamic Technology)

$$
\begin{aligned}
&\min \varphi \\
&s.t. \quad \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{n} \lambda_T^i I_{T+1}^i \geq I_{T+1}^o & \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i I_{t+1}^i \geq \hat{I}_{t+1} & (t = 0, \cdots, T-1) \end{array} \right. \\
&\qquad\ \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i Y_t^i \geq Y_t^o & (t = 0, \cdots, T) \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i X_t^i \leq \varphi X_t^o & (t = 0, \cdots, T) \end{array} \right. \\
&\qquad\ \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{n} \lambda_0^i I_0^i \leq \varphi I_0^o & \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i I_t^i \leq \hat{I}_t & (t = 1, \cdots, T) \end{array} \right. \\
&\qquad\ \lambda_t^i \geq 0
\end{aligned}
\tag{3}
$$

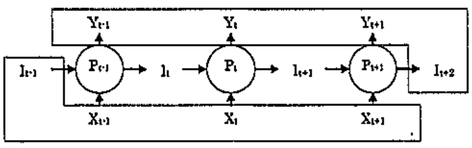

図 2: 基本的動学モデル

このモデルは、中間投入＝産出物 I_t を導入することにより、異時点間の生産過程の間に関連性を与えるものである。このモデルは模式的に表現すると図2のようになる。

このモデルにおいて、中間投入 $\hat{I}_t$ は、$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{t-1}^i I_t^i \geq \hat{I}_t \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i I_t^i$ $(t = 1, \cdots, T)$ というように束縛されているものの、変数であることに注意する必要がある。Färe and Grosskopf(1996) はこの変数を操作することにより、動学的な最適化が図られると考えている。

2.3 Sengupta の研究

Sengupta(1995) は、DEA モデルの主問題に出現する制約式を生産フロンティアと解釈することを出発点とし、様々な動学的モデルを提案している。中でも、疑固定要素に関するシャドープライスの概念の導入と、それの最適成長経路を線型計画の中で取り扱っていることが特筆される。

通常の DEA ではすべての投入要素を可変とみなすことが多いのであるが、現実の生産過程では疑固定要素 (設備など) がある。これは費用効率性を計測する DEA 問題で目的関数に含まれない、「制御できない変数」として取り扱われる。このモデルを解くと、その疑固定要素に対応する架空の価格 (シャドー・プライス) が計算できる。シャドー・プライスが現実の資本価格よりも高いか低いかによって、設備が過大であるかどうか (over capital) が検証できる。

Sengupta はこの関係を基礎として、資本量を制御する最適成長経路を導出し、これに対応した動学的な効率評価を与えようとしている。その実際のモデルについては、第3.4節において詳論する。

2.4 まとめ

これまでの DEA の先行研究において様々な時間の取り扱いがなされてきた。これらは (1) 短期的なフロンティアと長期的なフロンティアの関係、(2) 時間領域での大域的な最適化もしくは最適制御の二つに大別することが出来る。また、短期的

なフロンティアの計測を通じて、それがどのように変動したのかを計測する課題も新たに生じる。すなわち、(3) 技術変化の計測である。

Alam and Sickles(1997) は長期的なフロンティアを計測する手法を提示しているが、短期的なフロンティアとの関係については未追求となっている。 Färe and Grosskopf(1996) と Sengupta(1995) は大域的最適化に関連して様々なモデルを提示している。しかし、短期と長期の関係について明示的なモデルを示していない。短期と長期の区別において重要となるものは擬固定的な生産要素の概念である。Sengupta はこれについての考察から、システム効率の概念を提示している。Färe and Grosskopf は擬固定的な投入要素について言及していないが、基本的動学モデルにおいて中間投入要素の概念を導入しており、これが実質的に擬固定的投入要素の役割を果たすと考えられる。

これらの事例より、二つの論点を抽出することが出来る。

1. 短期と長期の関連性について、凸包を構成するデータセットから考える必要がある。従来の WINDOW 分析もこの観点から評価するべきである。

2. 擬固定的な生産要素を DEA の枠組みにどのように取込むかを考察する必要がある。制御できない変数として取り扱う、中間投入要素として取り扱うという方法が考えられる。二つの方法は後述するように実質的に同一である。

時系列分析においては、この二つの論点を矛盾なく一つのモデルに表現することが必要となるが、この課題は次節において展開される。

3 基本的な分析枠組の提示

3.1 生産過程の連鎖

ここでは Färe and Grosskopf(1996) を参考として、動学的な DEA の枠組を構築する。ただし、最終的に定式化されるモデルは彼らのものとは同一ではない。

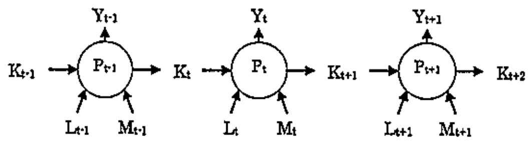

図 3: 生産過程の連鎖

図 3 は生産過程の連鎖を模式的に示したものである。P_t は t 期における生産過程を示し、ここでは投入要素として労働 L_t、原材料 M_t、資本 K_t が用いられる。この結果、産出物として Y_t が得られる。同時に資本 K_t は K_{t+1} に更新される。ここで、特徴的なことは資本 K_t が中間的な投入／産出物と解釈されていることである。また、それ以外の投入要素は、その期間内に消費されると解釈されていることにも留意する必要がある[1]。

なお、以下の記述では Y_t は単一生産物として統一して取り扱うが、これを複数生産物に拡張することは容易である。

3.2 短期における費用最小化モデル

ここでは短期費用関数の定式化に相当する DEA モデルを提示する。データの履歴をどの程度保持するかにより、幾つかのバリエーションを考えることが出来る。

なお、ここで w_L、w_M、w_K はそれぞれ労働、原材料、資本に関する投入要素価格である。また、

[1]例えば労働 L_t については、総労働時間が本来の意味であり、従業員組織が直接の対象となっているわけではない。従業員数がデータとして採用されている場合でも、それは総労働時間の代理変数とみなすべきである。

記号「^」はそれがデータではなく、変数であることを示す。

1. データの履歴をまったく保持しない場合

   t 期のデータのみを用い、K_t^o は更新されないものとする。

$$
\begin{aligned}
&\min C_t - w_K K_t^o = w_L \hat{L}_t + w_M \hat{M}_t \\
&s.t. \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i \begin{pmatrix} L_t^i \\ M_t^i \\ K_t^i \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \hat{L}_t \\ \hat{M}_t \\ K_t^o \end{pmatrix} \\
&\qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i \begin{pmatrix} Y_t^i \\ K_t^i \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} Y_t^o \\ K_t^o \end{pmatrix} \\
&\qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i = 1,\ \lambda_t^i, \hat{L}_t, \hat{M}_t \geq 0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

   このモデルは以下のように簡略化することが可能である。ここで K_t^o はいわゆる「制御できない変数」として機能している。

$$
\begin{aligned}
&\min C_t - w_K K_t^o = w_L \hat{L}_t + w_M \hat{M}_t \\
&s.t. \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i \begin{pmatrix} L_t^i \\ M_t^i \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \hat{L}_t \\ \hat{M}_t \end{pmatrix} \\
&\qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i Y_t^i \geq Y_t^o \\
&\qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i K_t^i = K_t^o \\
&\qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i = 1,\ \lambda_t^i, \hat{L}_t, \hat{M}_t \geq 0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

2. データの履歴をある程度保持する場合

   t 期における分析において t 期以前のデータを参照集合とすることは、過去に達成された業績を基準として現在の業績を評価する意味があり、十分に合理的であると思われる。

   データ保持の期間を (t_a, t_b) で表現する。(t, t) の場合は前述のデータ履歴を保持しない場合と同一である。$(t-s, t)$ の場合、WINDOW の幅を $s-1$ とする WINDOW 分析と同等の意味を持つ。$(0, t)$ の場合、t から過去の履歴をすべて用いるモデルとなる。$(0, T)$ の場合には、未来も含め全てのデータが利用される。

   保持された全データを用いて、以下のようなモデルが定式化される。

$$
\begin{aligned}
&\min C_t - w_K K_t^o = w_L \hat{L}_t + w_M \hat{M}_t \\
&s.t. \quad \sum_{t=t_a}^{t_b} \sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i \begin{pmatrix} L_t^i \\ M_t^i \\ K_t^i \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \hat{L}_t \\ \hat{M}_t \\ K_t^o \end{pmatrix} \\
&\qquad \sum_{t=t_a}^{t_b-1} \sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i \begin{pmatrix} Y_t^i \\ K_{t+1}^i \end{pmatrix} + \\
&\qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_{t_b}^i \begin{pmatrix} Y_{t_b}^i \\ K_{t_b}^i \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} Y_t^o \\ K_t^o \end{pmatrix} \\
&\qquad \sum_{t=t_a}^{t_b} \sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i = 1,\ \lambda_t^i, \hat{L}_t, \hat{M}_t \geq 0
\end{aligned}
\tag{6}
$$

   このモデルは以下のように簡略化することが出来る。ただし、$\Delta K_t^i = K_{t+1}^i - K_t^i$ である。

$$
\begin{aligned}
&\min C_t - w_K K_t^o = w_L \hat{L}_t + w_M \hat{M}_t \\
&s.t. \quad \sum_{t=t_a}^{t_b} \sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i \begin{pmatrix} L_t^i \\ M_t^i \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \hat{L}_t \\ \hat{M}_t \end{pmatrix} \\
&\qquad \sum_{t=t_a}^{t_b} \sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i Y_t^i \geq Y_t^o \\
&\qquad \sum_{t=t_a}^{t_b-1} \sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i \Delta K_t^i \geq K_t^o - \sum_{t=t_a}^{t_b} \sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i K_t^i \geq 0 \\
&\qquad \sum_{t=t_a}^{t_b} \sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i = 1,\ \lambda_t^i, \hat{L}_t, \hat{M}_t \geq 0
\end{aligned}
\tag{7}
$$

以降では、短期モデルをデータの保持期間と合せて、モデル $S(t_a,t_b)$ というように表現する。

3.3 長期における費用最小化モデル

短期モデル $S(0,T)$ を基礎として、式 (8) のような長期費用モデル L を考えることができる。具体的には $S(0,T)$ の K_t^o を $\hat{K}_t$ に置き換えることにより L が得られる。この結果は Alam and Sickles(1997) のモデルと同等のものとなる。

短期、長期の各モデルについて最小費用を比較すると以下のような結果が得られるであろう。

$$L \le S(0,T) \le S(0,t) \le S(t-s,t) \le S(t,t)$$

いずれのモデルもそれ自体は動学的モデルではないことに注意するべきである。次節では短期モデルの動学的側面について触れる。また、大域的な最適化問題は、第 5 節において最適投資戦略の問題として言及する。

$$\begin{aligned}
&\min C_t = w_L \hat{L}_t + w_M \hat{M}_t + w_K \hat{K}_t \\
&s.t.\quad \sum_{t=0}^{T}\sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i \begin{pmatrix} L_t^i \\ M_t^i \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} \hat{L}_t \\ \hat{M}_t \end{pmatrix} \\
&\qquad \sum_{t=0}^{T}\sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i Y_t^i \ge Y_t^o \\
&\qquad \sum_{t=0}^{T-1}\sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i \Delta K_t^i \ge \hat{K}_t - \sum_{t=0}^{T}\sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i K_t^i \ge 0 \\
&\qquad \sum_{t=0}^{T}\sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i = 1,\ \lambda_t^i, \hat{L}_t, \hat{M}_t, \hat{K}_t \ge 0
\end{aligned} \tag{8}$$

3.4 短期モデルの動学的側面

$S(t,t)$ について、資本 K_t^o を $K_t^o + \Delta K_t$ に置き換えたモデルを考える。ここで ΔK_t は、符号が無制約であり、絶対値が K_t^o に対して十分に小さいものとする。

$$\begin{aligned}
&\min C_t = w_L \hat{L}_t + w_M \hat{M}_t + w_K (K_t^o + \Delta K_t) \\
&s.t.\quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i \begin{pmatrix} L_t^i \\ M_t^i \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} \hat{L}_t \\ \hat{M}_t \end{pmatrix} \\
&\qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i Y_t^i \ge Y_t^o \\
&\qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i K_t^i = K_t^o + \Delta K_t \\
&\qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i = 1,\ \lambda_t^i, \hat{L}_t, \hat{M}_t \ge 0,\ \Delta K_t \text{は自由}
\end{aligned} \tag{9}$$

このモデルは、(Y_t^o, K_t^o) の現状に対して K_t^o をどのように変更するべきかの情報を与える。ΔK_t は、K_t^o が Y_t^o に対して相対的に過剰であるか過小であるか、w_k が他の投入要素価格に対して高いか低いかに影響される。

上のモデルの双対問題は以下の通りである。

$$\begin{aligned}
&\max u_Y Y_t^o - v_K K_t^o + \sigma \\
&s.t.\quad u_Y Y_t^i - v_L L_t^i - v_M M_t^i - v_K K_t^i + \sigma \le 0 \\
&\qquad (i = 1, \cdots, n) \\
&\qquad 0 \le v_L \le w_L,\ 0 \le v_M \le w_M \\
&\qquad v_K = w_K,\ u_Y \ge 0
\end{aligned} \tag{10}$$

このモデルは Sengupta(2005) の提示したものと同等のモデルとなっている。このモデルにおいて重要な役割を果すものがシャドー・プライス v_K である。

もとの $S(t,t)$ についても同様の双対問題を考えることが出来、その結果、資本のシャドー・プライス v_K を得ることができる。式 (10) と比較することにより、次のようなことが言える。もしも $v_K \le w_K$ である場合には、$\Delta K_t \ge 0$ となり、現状の資本量は過小であることが示される。逆の場合には資本の過剰を意味する。この分析は任意の短期モデル $S(t_a,t_b)$ に適用することが可能である。

Sengupta(2005) はこうした関係を基礎として、ΔK_t の決定を最適制御システムの問題として捉

え、これについて動学的な効率性評価を与えることを提案している。

3.5 長期における費用最小化の計算

期間が増大することにより、線型計画問題の計算量が大きくなる。これを緩和するための工夫として以下のような方法が考えられる。

まず、以下のようなモデル $S'(0,t)$ を考える。

$$
\begin{aligned}
&\min \varphi_t \\
&s.t. \quad \sum_{t=0}^{t}\sum_{i=1}^{n}\lambda_t^i \begin{pmatrix} L_t^i \\ M_t^i \end{pmatrix} \le \varphi_t \begin{pmatrix} L_t^o \\ M_t^o \end{pmatrix} \\
&\qquad \sum_{t=0}^{t}\sum_{i=1}^{n}\lambda_t^i Y_t^i \ge Y_t^o \\
&\qquad \sum_{t=0}^{t-1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_t^i \Delta K_t^i \ge K_t^o - \sum_{t=0}^{t}\sum_{i=1}^{n}\lambda_t^i K_t^i \ge 0 \\
&\qquad \sum_{t=0}^{t}\sum_{i=1}^{n}\lambda_t^i = 1,\ \lambda_t^i \ge 0,\ \varphi_t \text{は自由}
\end{aligned} \tag{11}
$$

Step-1 最初の DEA

$t=0$ において、期間 $(0,0)$ のデータセットを用いてモデル $S'(0,0)$ を解く。効率的な DMU($\varphi_t=1$) とそうではない DMU を識別する。後者をデータセットから除去する。

Step-2 データセットの更新

$t-1$ において既に $S'(0,t-1)$ が解かれており、データセットから非効率な DMU のデータが除去されているものとする。データセットに新たに期間 (t,t) のデータを加える。

Step-3 t 度目の DEA

更新されたデータセットに基き、$S'(0,t)$ を解く。やはり、非効率的な DMU をデータセットから除去する。$t=T$ の場合、終了。そうでなければ、Step-2 に戻る。

4 TFP 成長率の計測と技術変化

ここでは、TFP 成長率を計測するための方法 (DEA/Malmquist Index Analysis) について述べる[2]。

t 期の短期生産フロンティアとある特定の DMU の投入–産出データ (x_t,y_t) との距離を $D_t^C(x_t,y_t)$ とする。ここで ^{C} は生産フロンティアが規模に関する収穫一定 (Constant Return to Scale、CRS) を前提としていることを意味する。

$$\pi_t = D_t^C(x_{t+1},y_{t+1})/D_t^C(x_t,y_t)$$

は t 期の生産フロンティアをものさしとして、t 期と $t+1$ 期を比較したことになる。同じくものさしを変えて、

$$\pi_{t+1} = D_{t+1}^C(x_{t+1},y_{t+1})/D_{t+1}^C(x_t,y_t)$$

を計算し、

$$\pi = \sqrt{\pi_t \cdot \pi_{t+1}}$$

という幾何平均をとったものが Malmquist 指数である。

技術的効率性を計測する DEA モデル (CCR) での目的関数の最適値が $D_t^C(x_t,y_t)$ として計算される、というところで DEA との接点が出てくる。具体的には以下のモデルを解くことになる。

$$
\begin{aligned}
&\min \varphi = 1/D_{t_a}^C(x_{t_b},y_{t_b}) \\
&s.t. \quad \sum_{t=0}^{t_a}\sum_{i=1}^{n}\lambda_t^i \begin{pmatrix} L_t^i \\ M_t^i \end{pmatrix} \le \varphi \begin{pmatrix} L_{t_b}^o \\ M_{t_b}^o \end{pmatrix} \\
&\qquad \sum_{t=0}^{t_a}\sum_{i=1}^{n}\lambda_t^i Y_t^i \ge Y_{t_b}^o \\
&\qquad \sum_{t=0}^{t_a-1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_t^i \Delta K_t^i \ge K_{t_b}^o - \sum_{t=0}^{t_a}\sum_{i=1}^{n}\lambda_t^i K_t^i \ge 0 \\
&\qquad \lambda_t^i \ge 0,\ \varphi \text{は自由}
\end{aligned} \tag{12}
$$

[2]Malmquist 指数の考え方自体は必ずしも DEA を必要とするものではなく、生産フロンティアさえ計算できれば良い。

双対問題で考えれば、この値が投入、産出に関する生産性指標を表現しているというのは容易にわかるので、π はそうした生産性指標がどの程度成長したのかを示すものだということが明らかとなろう。

Malmquist 指数の興味深い点は、これが技術変化もしくはフロンティアの変化 (TC)、技術的効率性の変化 (TEC)、規模の変化 (SCF) の 3 つの成分に分解されるということである[3]。すなわち、

$$\pi = \mathrm{TC} \cdot \mathrm{TEC} \cdot \mathrm{SCF}$$

$$\mathrm{TC} = \sqrt{\frac{D_t^V(x_{t+1}, y_{t+1})}{D_{t+1}^V(x_{t+1}, y_{t+1})} \cdot \frac{D_t^V(x_t, y_t)}{D_{t+1}^V(x_t, y_t)}}$$

$$\mathrm{TEC} = \frac{D_{t+1}^V(x_{t+1}, y_{t+1})}{D_t^V(x_t, y_t)}$$

$$\mathrm{SCF} = \sqrt{\frac{\frac{D_t^C(x_{t+1}, y_{t+1})}{D_t^V(x_{t+1}, y_{t+1})}}{\frac{D_t^C(x_t, y_t)}{D_t^V(x_t, y_t)}} \cdot \frac{\frac{D_{t+1}^C(x_{t+1}, y_{t+1})}{D_{t+1}^V(x_{t+1}, y_{t+1})}}{\frac{D_{t+1}^C(x_t, y_t)}{D_{t+1}^V(x_t, y_t)}}}$$

ここで、$D_t^V(x_t, y_t)$ は生産フロンティアが規模に関する収穫可変 (Variable Returns to Scale: VRS) を前提として計算された距離であり、BCC モデルにより計測される。具体的には式 (12) に $\sum_{t=0}^{t_a} \sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i = 1$ の制約を加えたものである。

さらに、技術変化成分 TC を子細に分析すると、どのような技術変化があったのかを知ることができる[4]。

5 動学的DEAと最適投資戦略

最適投資戦略の問題を考察する上で、動学的 DEA の役割は大きい。つまり、既に一群のデータが与えられており、これから将来の需要変化に対応した投資戦略を考えることができる。

$t = 0, 1, \cdots, T$ の期間について、既に投入、産出データが得られているものとする。$t = T + 1, \cdots, T + s, \cdots, T + S$ の期間の投資戦略を考えたい。その場合に、$s = 1, \cdots, S$ の期間について、Färe and Grosskopf(1996) の二つのモデルを組み合わせて、最適な投資戦略を考えることが出来る。ここでの投資戦略とは、K_T^o を前提とし、その後の予測需要系列 $\tilde{Y}_{T+1} \to \cdots, \to \tilde{Y}_{T+S}$ を満たしつつ、総費用を最小にするような最適資本量の系列 $\hat{K}_{T+1} \to \cdots, \to \hat{K}_{T+S-1}$ のことである。

$$\begin{aligned}
\min \overline{C} = & \sum_{s=1}^{S} w_L \hat{L}_{T+s} + w_M \hat{M}_{T+s} + w_K \hat{K}_{T+s} \\
s.t. \quad & \sum_{t=0}^{T} \sum_{i=1}^{n} \lambda_s^{t,i} \begin{pmatrix} L_t^i \\ M_t^i \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \hat{L}_{T+s} \\ \hat{M}_{T+s} \end{pmatrix} \\
& \qquad (s = 1, \cdots, S) \\
& \sum_{t=0}^{T} \sum_{i=1}^{n} \lambda_s^{t,i} Y_t^i \geq \tilde{Y}_{T+s}^o \\
& \qquad (s = 1, \cdots, S) \\
& \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{i=1}^{n} \lambda_s^{t,i} K_{t+1}^i + \lambda_s^{T,i} K_T^i \geq \hat{K}_{T+s} \\
& \qquad \geq \sum_{t=0}^{T} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{s+1}^{t,i} K_t^i \\
& \qquad (s = 1, \cdots, S-1) \\
& \sum_{t=0}^{T} \sum_{i=1}^{n} \lambda_1^{t,i} K_t^i \leq K_T^o \\
& \sum_{t=0}^{T} \sum_{i=1}^{n} \lambda_s^{t,i} = 1, \ \lambda_s^{t,i}, \hat{L}_{T+s}, \hat{M}_{T+s}, \hat{K}_{T+s} \geq 0
\end{aligned} \tag{13}$$

式 (13) は最適投資戦略を決定する動学的 DEA モデルである。ただし、$\tilde{Y}_{T+s}$、w_L、w_M、w_K が変動する可能性を考慮に入れるべきであろう。なお、$\tilde{Y}_{T+s}$ の変動には外的な環境要因 (人口の変動、競争状況の激化など) の他に内的な要因もあることに留意する必要がある。例えば、電気通信事業や鉄道事業などの場合、$\hat{K}_{T+s}$ のうちネットワーク設備に関わる部分はサービス供給地域の拡

[3]Malmquist 指数の分解方法については複数の提案がなされている。ここでは Ray(2004) の方法に従っている。
[4]例えば Färe and Grosskopf(1996) の第 4 章を参照せよ。

大をもたらすため、$\tilde{Y}_{T+s}$ の増加に寄与する。また、サービス価格について総括原価方式による料金規制が課せられている場合、C_{T+s} が産出物の価格に影響し、これがさらに $\tilde{Y}_{T+s}$ の変動をもたらす可能性もある。

6 まとめと今後の課題

DEA における時系列データの取り扱いについて、先行研究の整理を行い、これに基いて基本的なモデルを提示した。これにより、(1) 短期フロンティアに基く費用効率性計測、(2)Malmquist 指数に基く短期フロンティア・シフトの計測、(3) 短期フロンティアに基く固定資本量の評価、(4) 長期フロンティアに基く分析 (規模の経済性、サイズ効率性、範囲の経済性などの計測)、(5) 将来の最適投資戦略の決定モデルなどの分析方法を提示した。

今後の課題として、以下が挙げられる。

- 実証分析を実施すること。例えば、携帯電話市場 (産出は第 1 世代、第 2 世代、第 3 世代の各契約者数)、水道事業、鉄道事業、電力事業などが対象として考えられる。
- データに含まれる測定誤差の取り扱いが検討されなければならない。異常値の存在により、効率性計測結果に偏りが発生する可能性がある。そのため、WINDOW 分析によらず頑健性のある分析方法を考える必要がある。

参考文献

[1] Färe,R. and S.Grosskopf, "Intertemporal Production Frontiers: with Dynamic DEA", Kluwer Academic Publishers, 1996

[2] Färe,R., S.Grosskopf and R.Russell(eds), "Index Numbers : Essays in Honour of Sten Malmquist", Boston: Kluwer Academic Publisher,1998

[3] Sengupta, J. K., "Dynamics of Data Envelopment Analysis – Theory of Systems Efficiency –", Kluwer Academic Publishers, 1995

[4] Sengupta ,J.K., "New Efficiency theory : extentions and new applications of data envelopment analysis"

[5] Alam,I.M. and R.C.Sickles, "Long Run Properties of Technical Efficiency in the U.S. Airline Industry", WZB(Social Science Research Center Berlin), Discussion Papers, 1997

[6] Cornwell,C., P.Schmidt and R.C.Sickles, "Production Frontiers with Cross-Sectional and Time Series Variation in Efficiency Levels," Jouranal of Economtrics,46,1990,185-200

[7] Turkens,H. and P.Vanden Eeckaut, "Non-Parametric Efficiency, Progress and Regress Measures for Panel Data: Methodological Aspects," European Journal of Operational Research, 80(3) 1995, 474-499

[8] Ray, S.C., "Data Envelopment Analysis – Theory and Techniques for Economics and Operations Research", Cambridge University Press, 2004

[9] Cherchy,L. and T. Post, "Methodological Advances in DEA: A survey and an application for the Dutch electricity sector", http://www.few.eur.nl/few/people/gtpost /program.htm

[10] Ramanathan,R., "An Introduction to Data Envelopment Analysis: A Tool for Performance Measurement," Sage Publications Pvt.Ltd,2003

[11] Goto,M. and T.Sueyoshi, "Slack-adjusted DEA for Time Series Analysis: Performance Measuremtnt of Japanese Electrical Power Generation Industry in 1984-1993," European Journal of Operational Research, 133,8-35,2001

[12] Hashimoto,A. and S.Haneda, "Measuring the change in R&D Efficiency of the Japanese Pharmaceutical Industry," Department of Social Systems and Management Discussion Paper Series, No.1128,(University of Tsukuba), 2005

[13] Charnes, A., C.T. Clark, W.W. Cooper and B. Golany, "A Developmental Study of Data Envelopment Analysis in Measuring the Efficiency of Maintainance Units in the U.S. Air Forces", Annals of Operations Research, 2, 95–112 , 1985